

BÀI 1. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

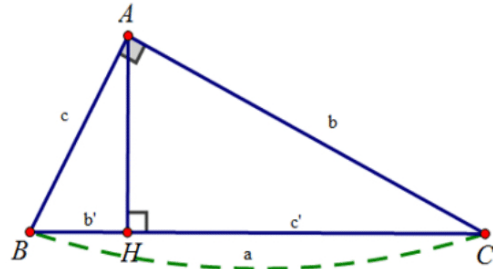
1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông:

$$b^2 = ab'; c^2 = ac' \quad (1)$$

$$h^2 = b'c' \quad (2)$$

$$bc = ah \quad (3)$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad (4)$$



B. CÁC DẠNG TOÁN

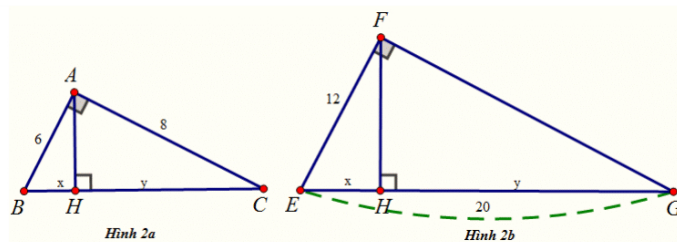
Dạng 1: Biết cạnh huyền và một cạnh góc vuông (hoặc hai cạnh góc vuông), tính các hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền và ngược lại

1. Phương pháp giải:

✦ Vận dụng hệ thức (1): $b^2 = ab'$; $c^2 = ac'$

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: (Bài 1, tr. 68 SGK) Hãy tính x và y trong mỗi hình sau:



Hướng dẫn (h.2a)

Áp dụng định lý Pi-ta-go vào $\triangle ABC$ ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Leftrightarrow BC = 10$.

Áp dụng hệ thức lượng số (1): $AB^2 = BH \cdot BC$ ta được $6^2 = 10 \cdot x \Rightarrow x = 3,6$.

Từ đó $y = HC = BC - HB = 6,4$.

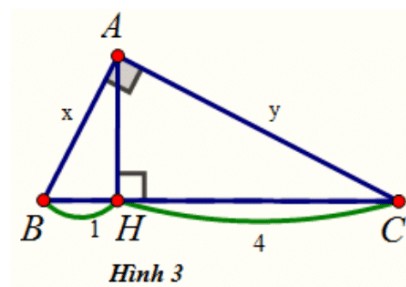
Hướng dẫn (h.2b)

Áp dụng hệ thức lượng số (1): $FE^2 = EH \cdot EG$ ta được $12^2 = 20x \Leftrightarrow x = 7,2$

Từ đó $y = HG = EG - HE = 12,8$.

Ví dụ 2: (Bài 12, tr. 11 SGK)

Tìm x và y trong hình 3.



Hướng dẫn (h.3)

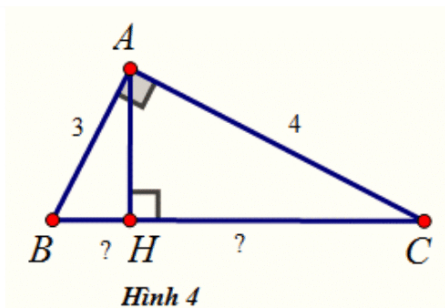
Áp dụng hệ thức lượng số (1) vào $\triangle ABC$ ta có:

$$AB^2 = BH.BC = 1(1+4) = 5 \Rightarrow AB = x = \sqrt{5}.$$

$$AC^2 = CH.BC = 4(1+4) = 20 \Rightarrow AC = y = 2\sqrt{5}.$$

Ví dụ 3: (Bài 5, tr. 69 SGK)

Trong tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 và 4, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Hãy tính đường cao này và độ dài đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.



Hướng dẫn (h.4)

Áp dụng định lý Pi-ta-go vào $\triangle ABC$ ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$.

Áp dụng hệ thức lượng số (1) vào $\triangle ABC$ ta có: $AB^2 = BH.BC \Leftrightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = 1,8$.

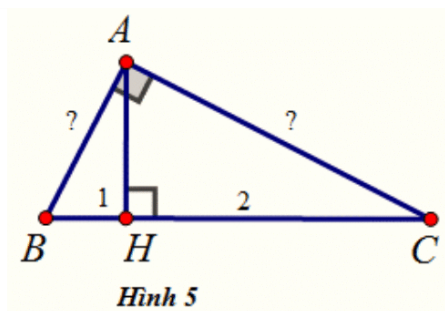
$$HC = BC - HB = 3,2.$$

Áp dụng hệ thức lượng số (2) vào $\triangle ABC$ ta có:

$$AH^2 = BH.HC \Rightarrow AH = \sqrt{BH.HC} = \sqrt{1,8.3,2} = 2,4.$$

Ví dụ 4: (Bài 6, tr. 69 SGK)

Đường cao của tam giác vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài là 1 và 2. Hãy tính các cạnh góc vuông của tam giác này.



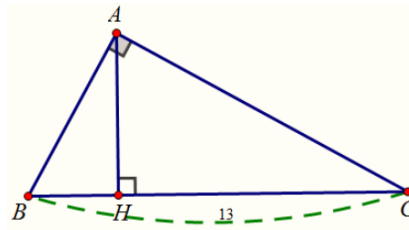
Hướng dẫn (h.5)

Áp dụng hệ thức lượng số (1) vào $\triangle ABC$ ta có: $AB^2 = BH.BC = 1.(1+2) = 3 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$.

$$AC^2 = CH.BC = 2.(1+2) = 6 \Rightarrow AC = \sqrt{6}.$$

3. Bài tập áp dụng

Bài tập 1. Tìm x và y trong hình biết $BC = 13$ và $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$.



Hướng dẫn

Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow AB = \frac{5}{12} AC$.

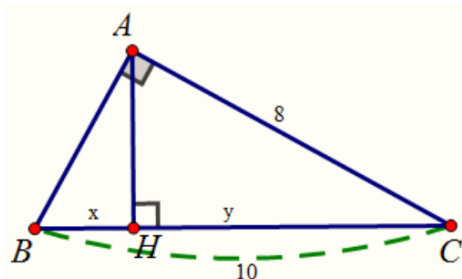
Áp dụng định lý Pi-ta-go vào $\triangle ABC$ ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 13^2 = \left(\frac{5}{12} AC\right)^2 + AC^2 \Leftrightarrow 169 = \frac{169}{144} AC^2 \Rightarrow AC = 12.$$

Áp dụng hệ thức lượng số (1) vào $\triangle ABC$ ta có: $AB^2 = BH \cdot BC \Leftrightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{25}{13}$.

$$HC = BC - HB = \frac{144}{13}.$$

Bài tập 2. Tìm x và y trong hình.

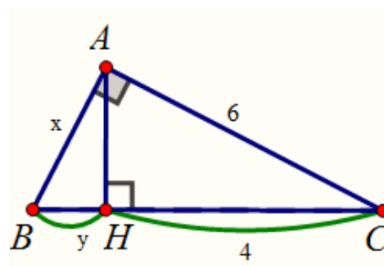


Hướng dẫn

Áp dụng hệ thức lượng số (1) vào $\triangle ABC$ ta có: $AC^2 = CH \cdot BC \Leftrightarrow CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{8^2}{10} = 6,4 = y$.

$$HB = BC - HC = 3,6.$$

Bài tập 3. Tìm x và y trong hình.



Hướng dẫn

Áp dụng hệ thức lượng số (1) vào $\triangle ABC$ ta có: $AC^2 = CH.BC \Leftrightarrow BC = \frac{AC^2}{CH} = \frac{6^2}{4} = 9$.

$$y = HB = BC - HC = 9 - 4 = 5.$$

$$AB^2 = BH.BC = 5.9 = 45 \Leftrightarrow AB = 3\sqrt{5} = x.$$

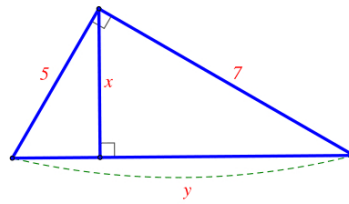
Dạng 2. Các bài toán liên quan đến độ dài đường cao ứng với cạnh huyền

1. Phương pháp giải

✦ Vận dụng các hệ thức (2): $h^2 = b'c'$, (3): $ha = bc$.

2. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Tìm x, y trong hình vẽ



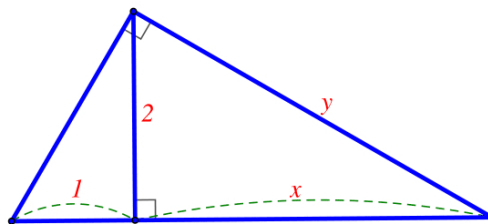
Hướng dẫn

Cạnh huyền : $y = \sqrt{74}$

Áp dụng (3): $ha = bc$ ta được $x.y = 5.7 \Rightarrow x = \frac{35}{\sqrt{74}}$

Vậy $x = \frac{35}{\sqrt{74}}$; $y = \sqrt{74}$

Ví dụ 2. Tìm x, y trong hình vẽ



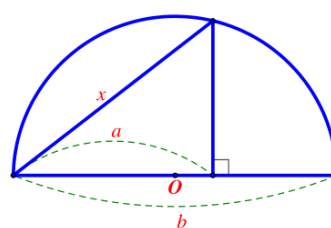
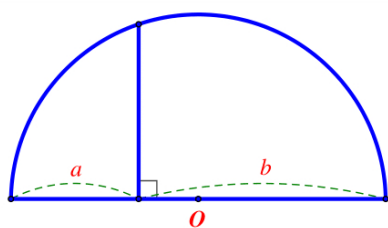
Hướng dẫn

Áp dụng (2): $h^2 = b'c'$, ta có: $2^2 = 1.x \Rightarrow x = 4$.

Áp dụng (1) ta được: $y^2 = 5.4 \Rightarrow y = \sqrt{20}$.

Vậy $x = 4$; $y = \sqrt{20}$.

Ví dụ 3: Người ta đưa hai cách vẽ đoạn trung bình nhân x của hai đoạn thẳng a, b như trong hai hình sau:



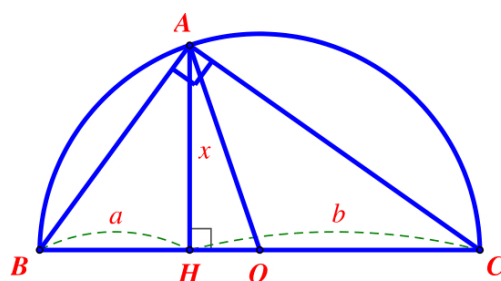
Hướng dẫn

Dựa vào các hệ thức (1),(2) hãy chứng minh các cách vẽ trên là đúng .

Gợi ý: nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác ấy là tam giác vuông .

Hướng dẫn

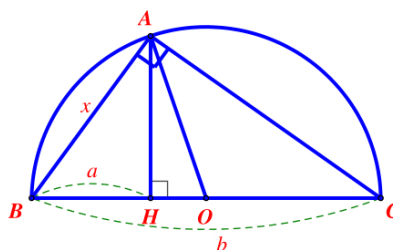
Cách 1



$$OA = OB = OC = \frac{BC}{2} (= R) \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } A.$$

Áp dụng (2) $h^2 = b'c'$, ta được $x^2 = ab$.

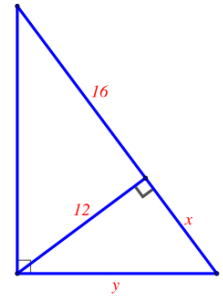
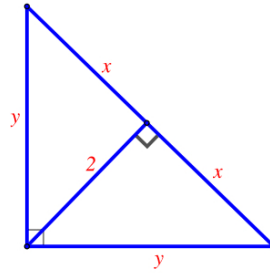
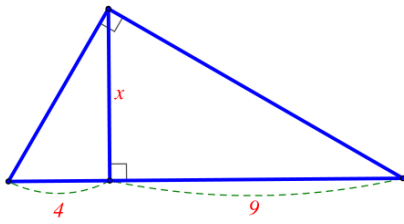
Cách 2



Chứng minh như trên được tam giác ABC vuông tại A .

Áp dụng hệ thức (1) ta được $x^2 = ab$.

Ví dụ 4: Tìm x, y trong hình vẽ



Hướng dẫn

a) Áp dụng hệ thức (2) ta được : $x^2 = 4.9 = 36 \Rightarrow x = 6$.

b) Áp dụng hệ thức (2) ta được : $2^2 = x.x \Rightarrow x = 2$.

Áp dụng hệ thức (1) được $y^2 = 2x.x; y = \sqrt{8}$.

c) Áp dụng hệ thức (2) ta được : $12^2 = 16.x \Rightarrow x = 9$.

Có thể áp dụng hệ thức (1) hoặc định lý Pi-ta-go để tính được $y = 15$.

Dạng 3. Các bài toán liên quan đến tổng các nghịch đảo bình phương của hai đoạn thẳng

1. Phương pháp giải

✦ Vận dụng hệ thức $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

2. Ví dụ minh họa.

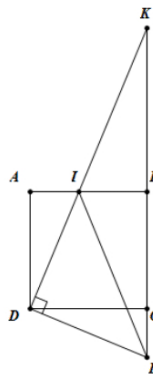
Ví dụ 2. (Bài 9, tr.70 SGK)

Cho hình vuông $ABCD$. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B . Tia DI và tia CB cắt nhau ở K . Kẻ đường thẳng qua D , vuông góc với DI . Đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L . Chứng minh rằng:

a). Tam giác DIL là một tam giác cân;

b). Tổng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB .

Hướng dẫn



a). $\triangle ADI = \triangle CDL$ (c.g.c) $\Rightarrow \triangle DIL$ là tam giác cân.

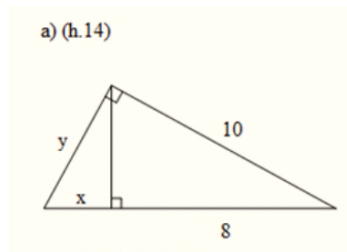
b). Áp dụng hệ thức lượng: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ vào tam giác DKL ta được:

$$\frac{1}{DC^2} = \frac{1}{DL^2} + \frac{1}{DK^2} \text{ hay } \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}.$$

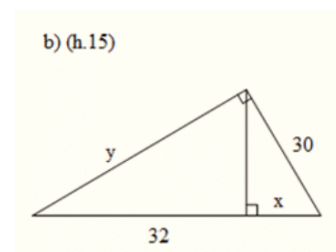
Vì DC không đổi nên $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi.

C. LUYỆN TẬP

Bài 1. Tính x và y trong mỗi hình sau:



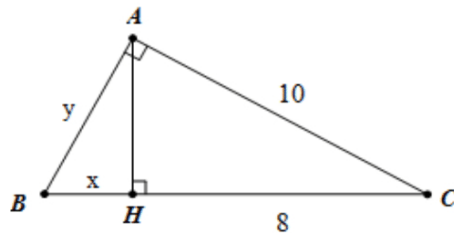
Hình 14



Hình 15

Hướng dẫn

a).



Gọi tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao ($H \in BC$), có

$AC = 10$; $AB = y$; $BH = x$; $HC = 8$ ($x, y > 0$). Khi đó:

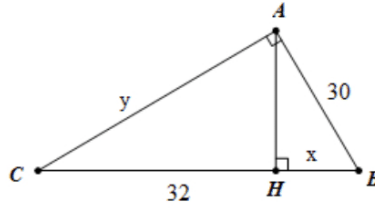
Tam giác ACH vuông tại H , ta có: $AH^2 = AC^2 - CH^2 \Rightarrow AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

Tam giác ABC vuông tại A , ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{AH^2 \cdot AC^2}{AC^2 - AH^2}} = \sqrt{\frac{6^2 \cdot 10^2}{10^2 - 6^2}} = \frac{15}{2}$

$$\Rightarrow y = \frac{15}{2}.$$

Tam giác ABH vuông tại H , ta có: $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - 6^2} = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{2}$.

b).



Gọi tam giác ABC vuông tại A , AH là đường cao ($H \in BC$), có

$$AB = 30, AC = y, CH = 32, BH = x \ (x, y > 0) \Rightarrow BC = BH + CH = x + 32$$

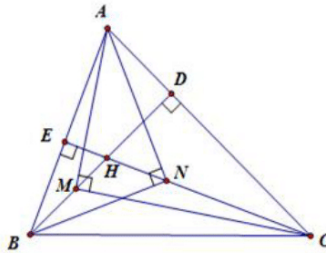
$$\text{Áp dụng công thức: } AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow AB^2 = BH \cdot (BH + CH) \Rightarrow 30^2 = x(x + 32) \Rightarrow x = 18.$$

$$\Rightarrow BC = BH + CH = x + 32 = 18 + 32 = 50.$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông tại } A, \text{ ta có: } AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow y = AC = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40.$$

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC , hai đường cao BE và CF , cắt nhau tại H . Trên HB và HC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $AMC = ANC = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AM = AN$.

Hướng dẫn



$$\triangle ANB \text{ vuông tại } N, NE \text{ là đường cao} \Rightarrow AN = AE \cdot AB \quad (1)$$

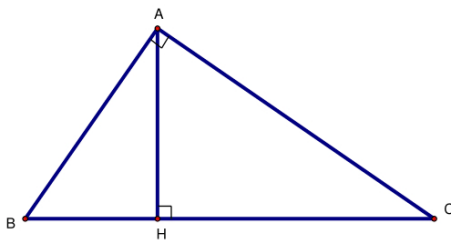
$$\triangle AMC \text{ vuông tại } M, MD \text{ là đường cao} \Rightarrow AN = AD \cdot AC \quad (2)$$

$$A \text{ nằm ngoài đường tròn tứ giác } BCDE \text{ nội tiếp đường tròn} \Rightarrow AE \cdot AB = AD \cdot AC \quad (3)$$

Từ (1)(2)(3) suy ra $AM = AN$.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $\frac{AB}{AC} = \frac{20}{21}$ và $AH = 420$. Tính chu vi của tam giác ABC .

Hướng dẫn giải



$$\text{Ta có: } \frac{AB}{AC} = \frac{20}{21} \Leftrightarrow AB = \frac{20}{21} AC.$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2} = \frac{\left(\frac{20}{21}AC\right)^2 + AC^2}{\left(\frac{20}{21}AC\right)^2 \cdot AC^2} = \frac{\left(\frac{400}{441} + 1\right)AC^2}{\frac{400}{441}AC^4} = \frac{841}{440AC^2}$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{AH^2} = \frac{841}{440AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{420^2} = \frac{841}{440AC^2} \Leftrightarrow AC^2 = \frac{420^2 \cdot 841}{440} = 337164,5455$$

$$\text{Vậy: } AC = \sqrt{337164,5455} \approx 580,66 \text{ (cm)}$$

$$\text{Suy ra: } AB = \frac{20}{21}AC = \frac{20}{21} \cdot 580,66 \approx 553,01 \text{ cm}$$

Áp dụng định lí Pi-Ta-go cho tam giác ABC vuông tại A ta được:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 305802,0601 + 337164,5455 = 642928,6065$$

$$\text{Khi đó: } BC = \sqrt{642928,6065} \approx 801,86.$$

$$\text{Chu vi tam giác ABC là: } C_{ABC} = AB + AC + BC = 1935,53 \text{ (cm)}$$

Bài 4. Cho hình thang ABCD vuông góc tại A và D. Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Biết $AB = 2\sqrt{13}$; $OA = 6$. Tính diện tích hành thang.

Hướng dẫn giải

Tam giác BAD là tam giác vuông tại A có AO là đường cao nên:

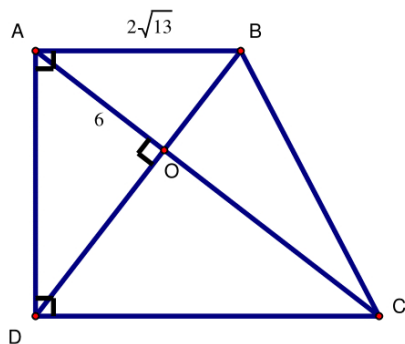
$$\frac{1}{AO^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AO^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{6^2} - \frac{1}{(2\sqrt{13})^2} = \frac{1}{36} - \frac{1}{52} = \frac{1}{117}$$

$$\text{Do đó: } AD = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}.$$

ΔAOD vuông tại O áp dụng định lí Pi-Ta-go ta được:

$$AD^2 = AO^2 + OD^2 \Rightarrow OD^2 = AD^2 - AO^2 = (3\sqrt{13})^2 - 6^2 = 117 - 36 = 81$$

$$\text{Nên: } OD = \sqrt{81} = 9 \text{ (cm)}.$$



ΔADC vuông tại D có DO là đường cao nên

$$\begin{aligned} \frac{1}{DO^2} &= \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} \Rightarrow \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{DO^2} - \frac{1}{DA^2} \\ &= \frac{1}{9^2} - \frac{1}{(3\sqrt{13})^2} = \frac{1}{81} - \frac{1}{117} = \frac{4}{1053} \end{aligned}$$

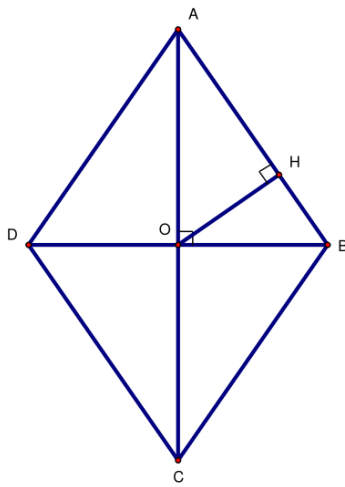
Do đó: $DC = \sqrt{\frac{1053}{4}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích hình thang ABCD là:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD(AB + DC) = \frac{1}{2}3\sqrt{13}\left(2\sqrt{13} + \frac{9\sqrt{13}}{2}\right) = \frac{507}{2}(cm^2)$$

Bài 5. Cho hình thoi ABCD, hai đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết khoảng cách từ O tới mỗi cạnh của hình thoi là h. Biết rằng: $AC = m; BD = n$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4h^2}$.

Hướng dẫn giải



Gọi H là chân đường cao của tam giác OAB vuông tại O.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} AC = m \\ BD = n \\ OH = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AO = \frac{m}{2} \\ BO = \frac{n}{2} \\ OH = h \end{cases}$$

Tam giác AOB vuông tại O có OH là đường cao nên:

$$\begin{aligned} \frac{1}{OH^2} &= \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{\left(\frac{m}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} &= \frac{4}{m^2} + \frac{4}{n^2} \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = 4\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4h^2} \end{aligned}$$